Relaciones VI

José de Jesús Lavalle Martínez

Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Facultad de Ciencias de la Computación
Estructuras Discretas CCOS 009

Contenido

Motivación I

- En muchos casos asignamos a cada elemento de un conjunto un elemento particular de un segundo conjunto (que puede ser el mismo que el primero).

Motivación I

- Por ejemplo, suponga que a cada estudiante de una clase de matemáticas discretas se le asigna una calificación con letras del conjunto {A, B, C, D, F}.

- Y supongamos que las calificaciones son A para Adams, C para Chou, B para Goodfriend, A para Rodríguez y F para Stevens.

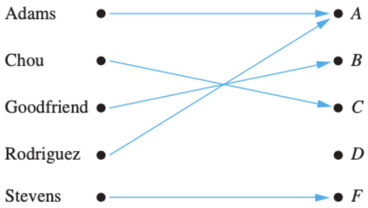

Figura 1: Asignación de calificaciones en un curso de matemáticas discretas.

Motivación II

- Esta asignación es un ejemplo de función.

Motivación II

- El concepto de función es extremadamente importante en matemáticas y ciencias de la computación.

Motivación II

- Por ejemplo, en matemáticas discretas, las funciones se utilizan en la definición de estructuras discretas como secuencias y cadenas.

Motivación II

- Las funciones también se utilizan para representar el tiempo que tarda una computadora en resolver problemas de un tamaño determinado.

Motivación II

- Muchos programas y subrutinas de computadora están diseñados para calcular valores de funciones.

Definición 1

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A a B es una asignación de exactamente un elemento de B a cada elemento de A. Escribimos $f(a) = b$ si b es el único elemento de B asignado por la función f al elemento a de A. Si f es una función de A a B, escribimos $f : A \to B$.

Definición de función I

Observación 1

En ocasiones, las funciones también se denominan asignaciones, mapeos o transformaciones.

Definición de función II

- Las funciones se especifican de muchas formas diferentes.

Definición de función II

- A veces declaramos explícitamente las asignaciones, como en la Figura 1.

Definición de función II

- A menudo damos una fórmula, como $f(x) = x + 1$, para definir una función.

Definición de función II

- Otras veces usamos un programa de computadora para especificar una función.

Definición de función II

- Una función $f : A \to B$ también se puede definir en términos de una relación de A a B.

Definición de función II

- Recuerde de la sección 2.1 que una relación de A a B es sólo un subconjunto de $A \times B$.

Definición de función II

- Una relación de A a B que contiene uno y sólo un par ordenado (a, b) para cada elemento $a \in A$ define una función f de A a B.

- Esta función está definida por la asignación $f(a) = b$, donde (a, b) es el par ordenado único en la relación que tiene a a como primer elemento.

Definición de función III

Definición 2

Si f es una función de A a B, decimos que A es el *dominio* de f y B es el *codominio* de f. Si $f(a) = b$, decimos que b es la *imagen* de a y a es una *preimagen* de b. El *rango*, o *imagen*, de f es el conjunto de todas las imágenes de elementos de A. Además, si f es una función de A a B, decimos que f *mapea* A en B.

Definición 2

Si f es una función de A a B, decimos que A es el *dominio* de f y B es el *codominio* de f. Si $f(a) = b$, decimos que b es la *imagen* de a y a es una *preimagen* de b. El *rango*, o *imagen*, de f es el conjunto de todas las imágenes de elementos de A. Además, si f es una función de A a B, decimos que f *mapea* A en B.

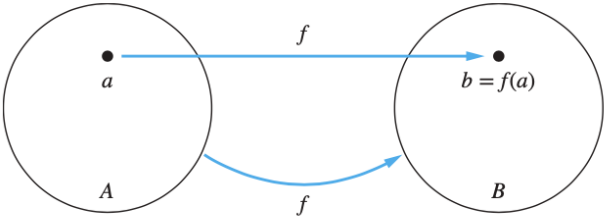

Figura 2: La función f mapea A en B.

Definición de función IV

Observación 2

Tenga en cuenta que el codominio de una función de A a B es el conjunto de todos los valores posibles de dicha función (es decir, todos los elementos de B), y el rango es el conjunto de todos los valores de $f(a)$ para $a \in A$, y siempre es un subconjunto del codominio. Es decir, el codominio es el conjunto de posibles valores de la función y el rango es el conjunto de todos los elementos del codominio que son el valor de f para al menos un elemento del dominio.

Definición de función V

- Cuando definimos una función especificamos su dominio, su codominio y el mapeo de elementos del dominio a elementos en el codominio.

Definición de función V

- Dos funciones son iguales cuando tienen el mismo dominio, tienen el mismo codominio y asignan cada elemento de su dominio común al mismo elemento en su codominio común.

Definición de función V

- Tenga en cuenta que si cambiamos el dominio o el codominio de una función, obtenemos una función diferente.

Definición de función V

- Si cambiamos el mapeo de elementos, también obtenemos una función diferente.

Ejemplo 1

- Sea f la función que asigna los dos últimos bits de una cadena de bits de longitud 2 o mayor a esa cadena.

Ejemplo 1

- Sea f la función que asigna los dos últimos bits de una cadena de bits de longitud 2 o mayor a esa cadena.
- Por ejemplo, $f(11010) = 10$.

Ejemplo 1

- Sea f la función que asigna los dos últimos bits de una cadena de bits de longitud 2 o mayor a esa cadena.
- Por ejemplo, $f(11010) = 10$.
- Entonces, el dominio de f es el conjunto de todas las cadenas de bits de longitud 2 o mayor, y tanto el codominio como el rango son el conjunto $\{00, 01, 10, 11\}$. $\square$

Ejemplo 2

- Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que asigna el cuadrado de un número entero a este número entero.

Ejemplo 2

- Entonces, $f(x) = x^2$, donde el dominio de f es el conjunto de todos los enteros,

Ejemplo 2

Ejemplo 2

- el codominio de f es el conjunto de todos los enteros y

Ejemplo 2

- el rango de f es el conjunto de todos los enteros que son cuadrados perfectos, es decir, $\{0, 1, 4, 9, \ldots\}$. $\square$

Suma y Producto de Funciones

- Una función se llama de **valor real** si su codominio es el conjunto de números reales, y se llama de **valor entero** si su codominio es el conjunto de números enteros.

Suma y Producto de Funciones

- Se pueden sumar y multiplicar dos funciones de valor real o dos funciones de valor entero con el mismo dominio.

Definición 3

Sean f_1 y f_2 funciones de A a $\mathbb{R}$. Entonces $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$ también son funciones de A a $\mathbb{R}$ definidas para todo $x \in A$ por

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x).$$

Ejemplo 3

Sean f_1 y f_2 funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tales que $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x - x^2$. ¿Cuáles son las funciones $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$?

Ejemplo 3

Sean f_1 y f_2 funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tales que $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x - x^2$. ¿Cuáles son las funciones $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$?

Solución:

- De la definición de la suma y el producto de funciones, se deduce que

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + (x - x^2) = x$$

Ejemplo 3

Sean f_1 y f_2 funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tales que $f_1(x) = x^2$ y $f_2(x) = x - x^2$. ¿Cuáles son las funciones $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$?

Solución:

- De la definición de la suma y el producto de funciones, se deduce que

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = x^2 + (x - x^2) = x$$

- y

$$(f_1 f_2)(x) = x^2(x - x^2) = x^3 - x^4.$$

□

Imágen de un Subconjunto del Dominio

Definición 4

Sea f una función de A a B y sea S un subconjunto de A. La imagen de S bajo la función f es el subconjunto de B que consta de las imágenes de los elementos de S. Denotamos la imagen de S por $f(S)$, entonces

$$f(S) = \{t | \exists s \in S(t = f(s))\}.$$

También usamos la abreviatura $\{f(s) | s \in S\}$ para denotar este conjunto.

Imágen de un Subconjunto del Dominio

Observación 3

La notación $f(S)$ para la imagen del conjunto S bajo la función f es potencialmente ambigua. Aquí, $f(S)$ denota un conjunto, y no el valor de la función f para el conjunto S.

Ejemplo 4

Ejemplo 4

- Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ con $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$ y $f(e) = 1$.

Ejemplo 4

- Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ con $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$ y $f(e) = 1$.
- La imagen del subconjunto $S = \{b, c, d\}$

Ejemplo 4

- Sean $A = \{a, b, c, d, e\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ con $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$ y $f(e) = 1$.
- La imagen del subconjunto $S = \{b, c, d\}$
- es el conjunto $f(S) = \{1, 4\}$. $\square$

Funciones Uno a Uno I

Algunas funciones nunca asignan el mismo valor a dos elementos diferentes del dominio. Se dice que estas funciones son uno a uno.

Definición 5

Se dice que una función f es *uno a uno*, o una *inyección*, si y sólo si $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$ para todo a y b en el dominio de f. Se dice que una función es *inyectiva* si es uno a uno.

Funciones Uno a Uno I

Observación 4

Podemos expresar que f es uno a uno usando cuantificadores como $\forall a \forall b (f(a) = f(b) \to a = b)$ o equivalentemente $\forall a \forall b (a \neq b \to f(a) \neq f(b))$, donde el universo de discurso es el dominio de la función.

Funciones Uno a Uno II

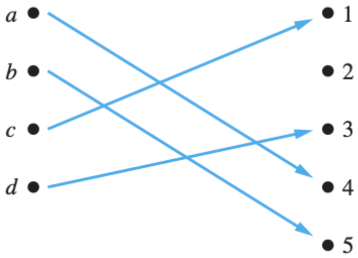

Figura 3: Una función uno a uno.

Ejemplo 5

Determina si la función $f(x) = x + 1$ del conjunto de números reales a sí mismo es uno a uno.

Ejemplo 5

Ejemplo 5

Determina si la función $f(x) = x + 1$ del conjunto de números reales a sí mismo es uno a uno.

Solución:

- Suponga que x y y son números reales con $f(x) = f(y)$, de modo que $x + 1 = y + 1$.

Ejemplo 5

Ejemplo 5

Determina si la función $f(x) = x + 1$ del conjunto de números reales a sí mismo es uno a uno.

Solución:

- Suponga que x y y son números reales con $f(x) = f(y)$, de modo que $x + 1 = y + 1$.
- Esto significa que $x = y$. Por tanto, $f(x) = x + 1$ es una función uno a uno de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. $\square$

Ejemplo 6

Determine si la función $f(x) = x^2$ del conjunto de números enteros al conjunto de números enteros es uno a uno.

Ejemplo 6

Determine si la función $f(x) = x^2$ del conjunto de números enteros al conjunto de números enteros es uno a uno.

Solución: La función $f(x) = x^2$ no es uno a uno porque, por ejemplo, $f(1) = f(-1) = 1$, pero $1 \neq -1$. $\square$

Funciones Sobre I

1. Para algunas funciones, el rango y el codominio son iguales.

Funciones Sobre I

2. Es decir, cada miembro del codominio es la imagen de algún elemento del dominio.

Funciones Sobre I

3. Las funciones con esta propiedad se llaman funciones **sobre**.

Definición 6

Una función f de A a B se llama *sobre*, o una *sobreyección*, si y sólo si para cada elemento $b \in B$ hay un elemento $a \in A$ con $f(a) = b$. Una función f se llama *sobreyectiva* si es sobre.

Funciones Sobre I

Observación 5

Una función f es sobre si $\forall y \exists x(f(x) = y)$, donde el dominio de x es el dominio de la función y el dominio de y es el codominio de la función.

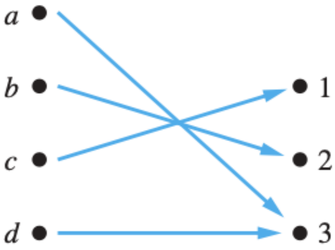

Figura 4: Una función sobre.

Ejemplo 7

¿Es sobre la función $f(x) = x + 1$ del conjunto de enteros al conjunto de enteros?

Ejemplo 7

¿Es sobre la función $f(x) = x + 1$ del conjunto de enteros al conjunto de enteros?

Solución:

- Esta función es sobre, porque para cada entero y hay un entero x tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 7

¿Es sobre la función $f(x) = x + 1$ del conjunto de enteros al conjunto de enteros?

Solución:

- Esta función es sobre, porque para cada entero y hay un entero x tal que $f(x) = y$.
- Para ver esto, tenga en cuenta que $f(x) = y$ si y sólo si $x + 1 = y$, lo cual se cumple si y sólo si $x = y - 1$.

Ejemplo 7

¿Es sobre la función $f(x) = x + 1$ del conjunto de enteros al conjunto de enteros?

Solución:

- Esta función es sobre, porque para cada entero y hay un entero x tal que $f(x) = y$.
- Para ver esto, tenga en cuenta que $f(x) = y$ si y sólo si $x + 1 = y$, lo cual se cumple si y sólo si $x = y - 1$.
- Tenga en cuenta que $y - 1$ también es un número entero, por lo que está en el dominio de f.

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Es sobre la función $f(x) = x^2$ del conjunto de enteros al conjunto de enteros?

Ejemplo 8

Ejemplo 8

¿Es sobre la función $f(x) = x^2$ del conjunto de enteros al conjunto de enteros?

Solución:

- La función f no es sobre porque no hay un número entero x con $x^2 = -1$, por ejemplo. $\square$

Funciones Biyectivas I

Definición 7

La función f es una *correspondencia uno a uno*, o una *biyección*, si es tanto uno a uno como sobre. También decimos que tal función es *biyectiva*.

Ejemplo 9

Ejemplo 9

Sea f la función de $\{a, b, c, d\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$ con $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ y $f(d) = 3$. ¿Es una biyección?

Ejemplo 9

Ejemplo 9

Sea f la función de $\{a, b, c, d\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$ con $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ y $f(d) = 3$. ¿Es una biyección?

Solución:

- La función f es uno a uno y sobre.

Ejemplo 9

Sea f la función de $\{a, b, c, d\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$ con $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ y $f(d) = 3$. ¿Es una biyección?

Solución:

- Es uno a uno porque no se asigna el mismo valor de función a dos valores en el dominio.

Ejemplo 9

Sea f la función de $\{a, b, c, d\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$ con $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ y $f(d) = 3$. ¿Es una biyección?

Solución:

- Es sobre porque los cuatro elementos del codominio son imágenes de elementos del dominio.

Ejemplo 9

Sea f la función de $\{a, b, c, d\}$ a $\{1, 2, 3, 4\}$ con $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ y $f(d) = 3$. ¿Es una biyección?

Solución:

- Por tanto, f es una biyección. $\square$

Ejemplo 10

- Sea A un conjunto.

Ejemplo 10

- La función identidad sobre A es la función $\iota_A : A \to A$, donde $\iota_A(x) = x$ para todo $x \in A$.

Ejemplo 10

- En otras palabras, la función identidad ι_A es la función que asigna cada elemento a sí mismo.

Ejemplo 10

- La función ι_A es uno a uno y sobre, por lo que es una biyección. $\square$

Funciones Biyectivas II

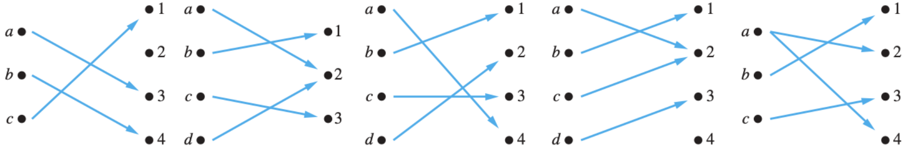

Figura 5: Ejemplos de diferentes tipos de correspondencias.

Suponga que $f : A \to B$.

Demostrar que f es inyectiva Muestre que si $f(x) = f(y)$ para $x, y \in A$ arbitrario, entonces $x = y$.

Demostrar que f no es inyectiva Encuentre elementos particulares $x, y \in A$ tales que $x \neq y$ y $f(x) = f(y)$.

Demostrar que f es sobre Considere un elemento arbitrario $y \in B$ y encuentre un elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Demostrar que f no es sobre Encuentre un $y \in B$ particular tal que $f(x) \neq y$ para todo $x \in A$.

Funciones Inversas I

- Considere ahora una correspondencia uno a uno f del conjunto A al conjunto B.

- Dado que f es una función sobre, cada elemento de B es la imagen de algún elemento en A.

- Además, debido a que f también es una función uno a uno, cada elemento de B es la imagen de un elemento único de A.

- En consecuencia, podemos definir una nueva función de B a A que invierte la correspondencia dada por f.

Definición 8

Sea f una correspondencia uno a uno del conjunto A al conjunto B. La *función inversa* de f es la función que asigna a un elemento b perteneciente a B el elemento único a en A tal que $f(a) = b$. La función inversa de f se denota por f^{-1}. Por tanto, $f^{-1}(b) = a$ cuando $f(a) = b$.

Observación 6

Asegúrese de no confundir la función f^{-1} con la función $1/f$, que es la función que asigna a cada x en el dominio el valor $1/f(x)$. Observe que este último tiene sentido sólo cuando $f(x)$ es un número real distinto de cero.

Funciones Inversas III

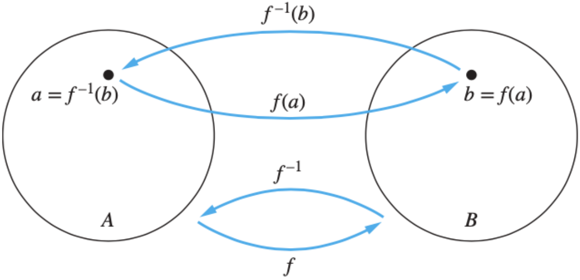

Figura 6: La función f^{-1} es la inversa de la función f.

Funciones Inversas IV

- Si una función f no es una correspondencia uno a uno, no podemos definir una función inversa de f.

Funciones Inversas IV

- Cuando f no es una correspondencia uno a uno, o no es uno a uno o no es sobre.

Funciones Inversas IV

- Si f no es uno a uno, algún elemento b en el codominio es la imagen de más de un elemento en el dominio.

Funciones Inversas IV

- Si f no es sobre, para algún elemento b en el codominio, no existe ningún elemento a en el dominio para el cual $f(a) = b$.

Funciones Inversas IV

- En consecuencia, si f no es una correspondencia uno a uno, no podemos asignar a cada elemento b en el codominio un elemento único a en el dominio tal que $f(a) = b$ (porque para algunos b hay más de un a o ningún a).

Funciones Inversas IV

- Una correspondencia uno a uno se llama **invertible** porque podemos definir una inversa de esta función.

Funciones Inversas IV

- Una función **no es invertible** si no es una correspondencia uno a uno, porque la inversa de dicha función no existe.

Ejemplo 11

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x + 1$. ¿Es invertible f, y si lo es, cuál es su inversa?

Ejemplo 11

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x + 1$. ¿Es invertible f, y si lo es, cuál es su inversa?

Solución:

- La función f tiene una inversa porque es una correspondencia uno a uno, como se muestra en los Ejemplos 5 y 7.

Ejemplo 11

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x + 1$. ¿Es invertible f, y si lo es, cuál es su inversa?

Solución:

- La función f tiene una inversa porque es una correspondencia uno a uno, como se muestra en los Ejemplos 5 y 7.
- Para invertir la correspondencia, suponga que y es la imagen de x, de modo que $y = x + 1$.

Ejemplo 11

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x + 1$. ¿Es invertible f, y si lo es, cuál es su inversa?

Solución:

- La función f tiene una inversa porque es una correspondencia uno a uno, como se muestra en los Ejemplos 5 y 7.
- Para invertir la correspondencia, suponga que y es la imagen de x, de modo que $y = x + 1$.
- Entonces $x = y - 1$.

Ejemplo 11

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x + 1$. ¿Es invertible f, y si lo es, cuál es su inversa?

Solución:

- La función f tiene una inversa porque es una correspondencia uno a uno, como se muestra en los Ejemplos 5 y 7.
- Para invertir la correspondencia, suponga que y es la imagen de x, de modo que $y = x + 1$.
- Entonces $x = y - 1$.
- Esto significa que $y - 1$ es el elemento único de $\mathbb{Z}$ que es enviado a y por f.

Ejemplo 11

Ejemplo 11

Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = x + 1$. ¿Es invertible f, y si lo es, cuál es su inversa?

Solución:

- La función f tiene una inversa porque es una correspondencia uno a uno, como se muestra en los Ejemplos 5 y 7.
- Para invertir la correspondencia, suponga que y es la imagen de x, de modo que $y = x + 1$.
- Entonces $x = y - 1$.
- Esto significa que $y - 1$ es el elemento único de $\mathbb{Z}$ que es enviado a y por f.
- En consecuencia, $f^{-1}(y) = y - 1$. $\square$

Ejemplo 12

Ejemplo 12

Sea f la función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. ¿Es invertible f?

Ejemplo 12

Ejemplo 12

Sea f la función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. ¿Es invertible f?

Solución:

- Como $f(-2) = f(2) = 4$, f no es uno a uno.

Ejemplo 12

Sea f la función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. ¿Es invertible f?

Solución:

- Si se definiera una función inversa, tendría que asignar dos elementos a 4, violando la Definición 1.

Ejemplo 12

Sea f la función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. ¿Es invertible f?

Solución:

- Por tanto, f no es invertible.

Ejemplo 12

Sea f la función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. ¿Es invertible f?

Solución:

- Tenga en cuenta que también podemos mostrar que f no es invertible porque no es sobre.

$\square$

Definición 9

Sea g una función del conjunto A al conjunto B y sea f una función del conjunto B al conjunto C. La *composición* de las funciones f y g, denotada para todo $a \in A$ por $f \circ g$, es la función de A a C definida por

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

- En otras palabras, $f \circ g$ es la función que asigna al elemento a de A el elemento asignado por f a $g(a)$.

Composición de Funciones II

- El dominio de $f \circ g$ es el dominio de g.

Composición de Funciones II

- El rango de $f \circ g$ es la imagen del rango de g con respecto a la función f.

Composición de Funciones II

- Es decir, para encontrar $(f \circ g)(a)$ primero aplicamos la función g a a para obtener $g(a)$ y luego aplicamos la función f al resultado $g(a)$ para obtener $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

Composición de Funciones II

- Tenga en cuenta que la composición $f \circ g$ no se puede definir a menos que el rango de g sea un subconjunto del dominio de f.

Composición de Funciones III

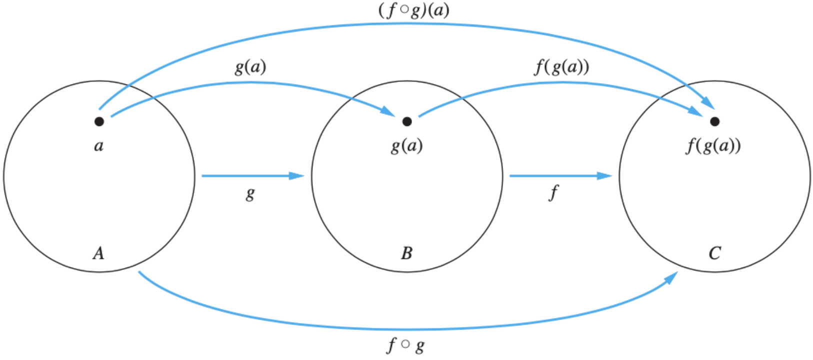

Figura 7: La composición de las funciones f y g.

Ejemplo 13

Ejemplo 13

Sean f y g las funciones del conjunto de enteros al conjunto de enteros definido por $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$. ¿Cuál es la composición de f y g? ¿Cuál es la composición de g y f?

Ejemplo 13

Sean f y g las funciones del conjunto de enteros al conjunto de enteros definido por $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$. ¿Cuál es la composición de f y g? ¿Cuál es la composición de g y f?

Solución:

- Se definen las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$.

Ejemplo 13

Sean f y g las funciones del conjunto de enteros al conjunto de enteros definido por $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$. ¿Cuál es la composición de f y g? ¿Cuál es la composición de g y f?

Solución:

- Así,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

Ejemplo 13

Sean f y g las funciones del conjunto de enteros al conjunto de enteros definido por $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = 3x + 2$. ¿Cuál es la composición de f y g? ¿Cuál es la composición de g y f?

Solución:

- y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11.$$

$\square$

Composición de Funciones IV

Observación 7

Tenga en cuenta que aunque $f \circ g$ y $g \circ f$ se definen para las funciones f y g en el Ejemplo 13, $f \circ g$ y $g \circ f$ no son iguales. En otras palabras, la ley conmutativa no se cumple para la composición de funciones.

Ejemplo 14

Ejemplo 14

Sean f y g las funciones definidas por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \sqrt{x}$ (donde $\sqrt{x}$ es la raíz cuadrada no negativa de x). ¿Cuál es la función $(f \circ g)(x)$?

Ejemplo 14

Sean f y g las funciones definidas por $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ con $g(x) = \sqrt{x}$ (donde $\sqrt{x}$ es la raíz cuadrada no negativa de x). ¿Cuál es la función $(f \circ g)(x)$?

Solución:

- El dominio de $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es el dominio de g, que es $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, el conjunto de números reales no negativos.

Ejemplo 14

Sean f y g las funciones definidas por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ con $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}^{+} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \sqrt{x}$ (donde $\sqrt{x}$ es la raíz cuadrada no negativa de x). ¿Cuál es la función $(f \circ g)(x)$?

Solución:

- Si x es un número real no negativo, tenemos $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}^2 = x$.

Ejemplo 14

Sean f y g las funciones definidas por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \sqrt{x}$ (donde $\sqrt{x}$ es la raíz cuadrada no negativa de x). ¿Cuál es la función $(f \circ g)(x)$?

Solución:

- El rango de $f \circ g$ es la imagen del rango de g con respecto a la función f.

Ejemplo 14

Sean f y g las funciones definidas por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \sqrt{x}$ (donde $\sqrt{x}$ es la raíz cuadrada no negativa de x). ¿Cuál es la función $(f \circ g)(x)$?

Solución:

- Este es el conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, el conjunto de números reales no negativos.

Ejemplo 14

Sean f y g las funciones definidas por $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ con $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = \sqrt{x}$ (donde $\sqrt{x}$ es la raíz cuadrada no negativa de x). ¿Cuál es la función $(f \circ g)(x)$?

Solución:

- Resumiendo, $f \circ g : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $f(g(x)) = x$ para todo x.

Composición de Funciones V

- Cuando se forma la composición de una función y su inversa, en cualquier orden, se obtiene una función identidad.

- Para ver esto, suponga que f es una correspondencia uno a uno del conjunto A al conjunto B.

- Entonces la función inversa f^{-1} existe y es una correspondencia uno a uno de B a A.

Composición de Funciones V

- La función inversa invierte la correspondencia de la función original, entonces $f^{-1}(b) = a$ cuando $f(a) = b$, y $f(a) = b$ cuando $f^{-1}(b) = a$.

Composición de Funciones V

- Por eso,

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a,$$

Composición de Funciones V

- y

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b.$$

Composición de Funciones V

- En consecuencia, $f^{-1} \circ f = \iota_A$ y $f \circ f^{-1} = \iota_B$, donde ι_A y ι_B son las funciones identidad de los conjuntos A y B, respectivamente.

Composición de Funciones V

- Es decir, $(f^{-1})^{-1} = f$.

Gráficas de Funciones

- Podemos asociar un conjunto de pares en $A \times B$ a cada función de A a B.

Gráficas de Funciones

- Este conjunto de pares se denomina **gráfica** de la función y, a menudo, se muestra gráficamente para ayudar a comprender el comportamiento de la función.

Definición 10

Sea f una función del conjunto A al conjunto B. La *gráfica* de la función f es el conjunto de pares ordenados $\{(a, b)|a \in A$ y $f(a) = b\}$.

Gráficas de Funciones

Definición 10

Sea f una función del conjunto A al conjunto B. La *gráfica* de la función f es el conjunto de pares ordenados $\{(a, b)|a \in A$ y $f(a) = b\}$.

- De la definición, la gráfica de una función f de A a B es el subconjunto de $A \times B$ que contiene los pares ordenados con la segunda entrada igual al elemento de B asignado por f a la primera entrada.

Definición 10

Sea f una función del conjunto A al conjunto B. La *gráfica* de la función f es el conjunto de pares ordenados $\{(a,b)|a \in A$ y $f(a)=b\}$.

- Además, observe que la gráfica de una función f de A a B es la misma que la relación de A a B determinada por la función f, como se describe en la Sección 2.6.1 de las notas del curso.

Ejemplo 15

Ejemplo 15

Muestre la gráfica de la función $f(n) = 2n + 1$ del conjunto de enteros al conjunto de enteros.

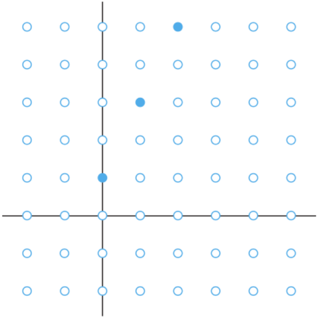

Figura 8: La gráfica de $f(n) = 2n + 1$ de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 16

Muestre la gráfica de la función $f(x) = x^2$ del conjunto de enteros al conjunto de enteros.

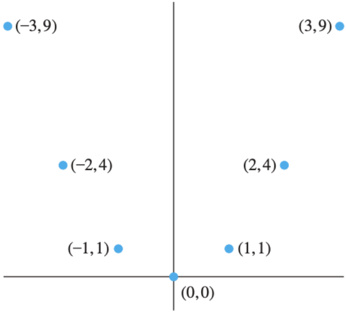

Figura 9: La gráfica de $f(x) = x^2$ de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$.

Piso y Techo I

- Sea x un número real, la función **piso** redondea x hacia abajo al número entero más cercano menor o igual a x,

Piso y Techo I

- y la función **techo** redondea x hacia arriba al número entero más cercano mayor o igual a x.

Piso y Techo I

- Estas funciones se utilizan a menudo cuando se cuentan objetos.

Piso y Techo I

- Desempeñan un papel importante en el análisis del número de pasos utilizados por los procedimientos para resolver problemas de un tamaño particular.

Piso y Techo I

Definición 11

La *función piso* asigna al número real x el entero más grande que es menor o igual que x. El valor de la función piso en x se denota por $\lfloor x \rfloor$. La *función techo* asigna al número real x el entero más pequeño que es mayor o igual que x. El valor de la función techo en x se denota por $\lceil x \rceil$.

Piso y Techo II

Ejemplo 17

Estos son algunos valores de las funciones piso y techo:

$$\lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0, \lceil \frac{1}{2} \rceil = 1, \lfloor -\frac{1}{2} \rfloor = -1, \lceil -\frac{1}{2} \rceil = 0,$$
$$\lfloor 3.1 \rfloor = 3, \lceil 3.1 \rceil = 4, \lfloor 7 \rfloor = 7, \lceil 7 \rceil = 7.$$

□

Piso y Techo III

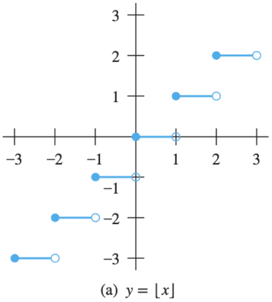

Figura 10: Las gráficas de las funciones (a) piso y (b) techo.

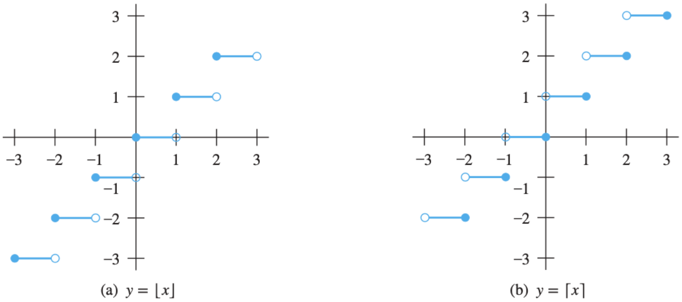

Figura 10: Las gráficas de las funciones (a) piso y (b) techo.

- La función piso $\lfloor x \rfloor$ tiene el mismo valor en todo el intervalo $[n, n+1)$, a saber, n, y luego salta a $n+1$ cuando $x = n+1$.

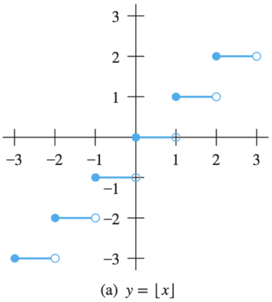

Figura 10: Las gráficas de las funciones (a) piso y (b) techo.

- La función techo $\lceil x \rceil$ tiene el mismo valor en todo el intervalo $(n, n+1]$, es decir, $n+1$, y luego salta a $n+2$ cuando x es un poco mayor que $n+1$.

Ejemplo 18

Ejemplo 18

Los datos almacenados en un disco de computadora o transmitidos a través de una red de datos generalmente se representan como una cadena de bytes. Cada byte se compone de 8 bits. ¿Cuántos bytes se requieren para codificar 100 bits de datos?

Ejemplo 18

Los datos almacenados en un disco de computadora o transmitidos a través de una red de datos generalmente se representan como una cadena de bytes. Cada byte se compone de 8 bits. ¿Cuántos bytes se requieren para codificar 100 bits de datos?

Solución:

- Para determinar el número de bytes necesarios, determinamos el número entero más pequeño que sea al menos tan grande como el cociente cuando 100 se divide por 8, el número de bits en un byte.

Ejemplo 18

Los datos almacenados en un disco de computadora o transmitidos a través de una red de datos generalmente se representan como una cadena de bytes. Cada byte se compone de 8 bits. ¿Cuántos bytes se requieren para codificar 100 bits de datos?

Solución:

- Para determinar el número de bytes necesarios, determinamos el número entero más pequeño que sea al menos tan grande como el cociente cuando 100 se divide por 8, el número de bits en un byte.
- En consecuencia, se requieren $\lceil 100/8 \rceil = \lceil 12.5 \rceil = 13$ bytes.

$\square$

Ejemplo 19

Ejemplo 19

En el modo de transferencia asincrónica (ATM) (un protocolo de comunicaciones utilizado en redes troncales), los datos se organizan en celdas de 53 bytes. ¿Cuántas celdas ATM se pueden transmitir en 1 minuto a través de una conexión que transmite datos a una velocidad de 500 kilobits por segundo?

Ejemplo 19

En el modo de transferencia asincrónica (ATM) (un protocolo de comunicaciones utilizado en redes troncales), los datos se organizan en celdas de 53 bytes. ¿Cuántas celdas ATM se pueden transmitir en 1 minuto a través de una conexión que transmite datos a una velocidad de 500 kilobits por segundo?

Solución:

- En 1 minuto, esta conexión puede transmitir $500,000 \cdot 60 = 30,000,000$ bits.

Ejemplo 19

Ejemplo 19

En el modo de transferencia asincrónica (ATM) (un protocolo de comunicaciones utilizado en redes troncales), los datos se organizan en celdas de 53 bytes. ¿Cuántas celdas ATM se pueden transmitir en 1 minuto a través de una conexión que transmite datos a una velocidad de 500 kilobits por segundo?

Solución:

- En 1 minuto, esta conexión puede transmitir $500,000 \cdot 60 = 30,000,000$ bits.
- Cada celda ATM tiene una longitud de 53 bytes, lo que significa que tiene una longitud de $53 \cdot 8 = 424$ bits.

Ejemplo 19

En el modo de transferencia asincrónica (ATM) (un protocolo de comunicaciones utilizado en redes troncales), los datos se organizan en celdas de 53 bytes. ¿Cuántas celdas ATM se pueden transmitir en 1 minuto a través de una conexión que transmite datos a una velocidad de 500 kilobits por segundo?

Solución:

- En 1 minuto, esta conexión puede transmitir $500,000 \cdot 60 = 30,000,000$ bits.
- Cada celda ATM tiene una longitud de 53 bytes, lo que significa que tiene una longitud de $53 \cdot 8 = 424$ bits.
- Para determinar el número de celdas que se pueden transmitir en 1 minuto, determinamos el número entero más grande que no exceda el cociente cuando 30,000,000 se divide por 424.

Ejemplo 19

Ejemplo 19

En el modo de transferencia asincrónica (ATM) (un protocolo de comunicaciones utilizado en redes troncales), los datos se organizan en celdas de 53 bytes. ¿Cuántas celdas ATM se pueden transmitir en 1 minuto a través de una conexión que transmite datos a una velocidad de 500 kilobits por segundo?

Solución:

- En 1 minuto, esta conexión puede transmitir $500,000 \cdot 60 = 30,000,000$ bits.
- Cada celda ATM tiene una longitud de 53 bytes, lo que significa que tiene una longitud de $53 \cdot 8 = 424$ bits.
- Para determinar el número de celdas que se pueden transmitir en 1 minuto, determinamos el número entero más grande que no exceda el cociente cuando 30,000,000 se divide por 424.
- En consecuencia, $\lfloor 30,000,000/424 \rfloor = 70,754$ celdas ATM se pueden transmitir en 1 minuto sobre una conexión de 500 kilobits por segundo.

Exponencial I

- Sea n un número entero positivo y sea b un número real positivo fijo.

Exponencial I

- Sea n un número entero positivo y sea b un número real positivo fijo.
- La función $f_b(n) = b^n$ está definida por

$$f_b(n) = b^n = b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b,$$

donde hay n factores de b multiplicados juntos en el lado derecho de la ecuación.

Exponencial I

- Sea n un número entero positivo y sea b un número real positivo fijo.
- La función $f_b(n) = b^n$ está definida por

$$f_b(n) = b^n = b \cdot b \cdot b \cdot \cdots \cdot b,$$

  donde hay n factores de b multiplicados juntos en el lado derecho de la ecuación.
- La función $f_b(x) = b^x$ se llama **función exponencial en base b**.

Exponencial I

Teorema 1

Sea b un número real positivo y x y y números reales. Entonces

1. $b^{x+y} = b^x b^y$, y
2. $(b^x)^y = b^{xy}$.

■

Exponencial II

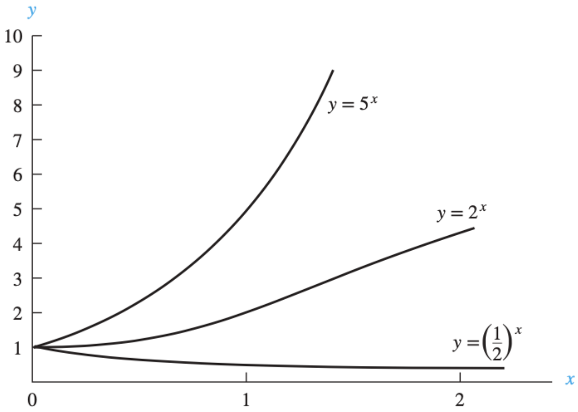

Figura 11: Gráficas de las funciones exponenciales en bases $\frac{1}{2}, 2$ y 5.

Logaritmo I

- Suponga que b es un número real con $b > 1$.

Logaritmo I

- Entonces la función exponencial b^x es estrictamente creciente (un hecho que se muestra en el cálculo).

Logaritmo I

- Es una correspondencia uno a uno del conjunto de números reales al conjunto de números reales no negativos.

Logaritmo I

- Por lo tanto, esta función tiene una inversa $\log_b x$, llamada la **función logarítmica en base b**.

Logaritmo I

- En otras palabras, si b es un número real mayor que 1 y x es un número real positivo, entonces

$$b^{\log_b x} = x.$$

Logaritmo I

- El valor de esta función en x se llama **logaritmo de x en base b**.

Logaritmo I

- De la definición se deduce que

$$\log_b b^x = x.$$

Logaritmo II

Teorema 2

Sea b un número real mayor que 1. Entonces

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$ siempre que x y y sean números reales positivos, y
2. $\log_b(x^y) = y \log_b x$ siempre que x es un número real positivo y y es un número real.

Logaritmo II

Teorema 3

CAMBIO DE FÓRMULA BASE PARA LOGARITMOS Sean a y b números reales mayores que 1 y sea x un número real positivo. Entonces

$$\log_a x = \log_b x / \log_b a.$$

Logaritmo III

- La notación $\log x$ se usará para denotar el logaritmo en base 2 de x, porque 2 es la base que usualmente usaremos para los logaritmos.

Logaritmo III

- Denotaremos logaritmos en base b, donde b es cualquier número real mayor que 1, por $\log_b x$

Logaritmo III

- y el logaritmo natural por $\ln x$.

Logaritmo III

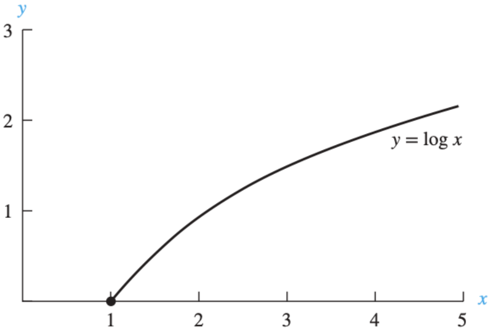

Figura 12: La gráfica de $f(x) = \log x$.

Factorial

- Otra función que usaremos es la **función factorial** $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^+$, denotada por $f(n) = n!$.

Factorial

- El valor de $f(n) = n!$ es el producto de los primeros n números enteros positivos, por lo que $f(n) = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$ [y $f(0) = 0! = 1$].

Factorial

Ejemplo 20

Tenemos que $f(1) = 1! = 1$, $f(2) = 2! = 1 \cdot 2 = 2$,
$f(6) = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$, y
$f(20) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 = 2,432,902,008,176,640,000.$

$\square$

Definición 12

Una *función parcial* f de un conjunto A a un conjunto B es una asignación a cada elemento a en un subconjunto de A, llamado *dominio de definición* de f, de un elemento único b en B. Los conjuntos A y B se llaman dominio y codominio de f, respectivamente. Decimos que f no está definida para los elementos de A que no están en el dominio de definición de f. Cuando el dominio de definición de f es igual a A, decimos que f es una *función total*.

Funciones Parciales

Observación 8

Escribimos $f : A \to B$ para denotar que f es una función parcial de A a B. Note que esta es la misma notación que se usa para las funciones. El contexto en el que se usa la notación determina si f es una función parcial o una función total.

Ejemplo 21

La función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ donde $f(n) = \sqrt{n}$ es una función parcial de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{R}$ donde el dominio de definición es el conjunto de enteros no negativos. Tenga en cuenta que f no está definida para números enteros negativos. $\square$

Ejercicios I

1. Determine si cada una de estas funciones de $\{a, b, c, d\}$ a sí mismo es uno a uno.
    1. $f(a) = b, f(b) = a, f(c) = c, f(d) = d$.
    2. $f(a) = b, f(b) = b, f(c) = d, f(d) = c$.
    3. $f(a) = d, f(b) = b, f(c) = c, f(d) = d$.
2. Determine si cada una de estas funciones de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}$ es uno a uno.
    1. $f(n) = n - 1$.
    2. $f(n) = n^2 + 1$.
    3. $f(n) = n^3$.
    4. $f(n) = \lceil n/2 \rceil$.
3. Determine si $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es sobre cuando
    1. $f(m, n) = 2m - n$.
    2. $f(m, n) = m^2 - n^2$.
    3. $f(m, n) = m + n + 1$.
    4. $f(m, n) = m^2 - 4$.

Ejercicios II

4. Determine si cada una de estas funciones es una biyección de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.
    1. $f(x) = -3x + 4.$
    2. $f(x) = 2x + 1.$
    3. $f(x) = -3x^2 + 7.$
    4. $f(x) = x^2 + 1.$
5. Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$, donde $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x + 2$, son funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.
6. Suponga que g es una función de A a B y f es una función de B a C.
    1. Demuestre que si tanto f como g son funciones uno a uno, entonces $f \circ g$ también es uno a uno.
    2. Demuestre que si tanto f como g son funciones sobre, entonces $f \circ g$ también es sobre.
7. Suponga que g es una función de A a B y f es una función de B a C. Pruebe cada una de estas afirmaciones.
    1. Si $f \circ g$ es sobre, entonces f debe ser sobre.
    2. Si $f \circ g$ es uno a uno, entonces g debe ser uno a uno.